

Zadanie 1

Znajdź wzory ogólne poniższych ciągów na podstawie ich kilku początkowych wyrazów.

- (a) $(a_n) = (1,4,7,10,...)$ (b) $(b_n) = (8,-4\sqrt{2},4,-2\sqrt{2},...)$
 (c) $(c_n) = (0,1,0,-1,0,1,0,-1,0,...)$ (d) $(d_n) = (0,1,5,23,119,...)$
 (e) $(e_n) = (1,0,1,0,...)$ (f) $(f_n) = (1,11,111,1111,...)$

Zadanie 2

Napisz wzory określające wskazane wyrazy podanych ciągów.

- (a) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 1}$, a_{n+1} (b) $b_n = \frac{1}{(2n)!}$, b_{3n+2}
 (c) $c_n = 3^n + 3^{n+1} + \dots + 3^{2n}$, c_{n^2} (d) $d_n = (n!)^{n+1}$, d_{3^n}

Zadanie 3

Zbadaj, czy poniższe ciągi są: ograniczone z dołu, ograniczone z góry, ograniczone.

- (a) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 2}$ (b) $b_n = 100 - \sqrt{n}$
 (c) $d_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$

Zadanie 4

Zbadaj, czy poniższe ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca.

- (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (b) $b_n = \frac{n^2 + 1}{n!}$
 (c) $c_n = \cos \frac{\pi}{2n}$ (d) $d_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$

Zadanie 5

Uzasadnij poniższe równości korzystając z definicji granicy ciągu.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{n+1} 5 = 0$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} = \infty$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 2^n) = -\infty$
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1$

Zadanie 6

Oblicz poniższe granice. Skorzystaj z twierdzeń o arytmetyce granic.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^6 - 3n^4 + 2}{5 - 10n^6}$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2 + 1}}{n}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(2n - 1)!}{(2n + 1)! + 1}$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4^n + 1}}{\sqrt[3]{8^n + 1}}$

Zadanie 7

Wyznacz poniższe granice. Skorzystaj z twierdzenia o trzech ciągach.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n + 4n}{3n - 1}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + 3}$
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1}}$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$
 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(2^n + 1)}{\log_2(4^n + 1)}$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$

Zadanie 8

Uzasadnij zbieżność poniższych ciągów. Skorzystaj z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym.

- (a) $x_n = \frac{2^n}{n!}$ (b) $y_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}$ (c) $z_1 = 2$, $z_{n+1} = \frac{z_n}{1 + z_n}$

Zadanie 9

Oblicz poniższe granice. Skorzystaj z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^{6n}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2n^2+4n}}{(n^2+2n)^{n^2+2n}}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^n$

Zadanie 10

Znajdź poniższe granice. Skorzystaj z twierdzenia o dwóch ciągach.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} [n^4 + (-1)^n n]$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2}{n - \sin n}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} [3^n + (-2)^n]$
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\sin n - n}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right)$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(n^3 \sqrt{2})}{E(\sqrt{n^2 + 1})}$
 // E(x) – część całkowita liczby x

Zadanie 11

Oblicz poniższe granice. Skorzystaj z tabelki działań z symbolem ∞ .

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)^n$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)3^n}{n(2^n+1)}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{\sqrt{n}}$
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + 3n - n}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (7^n - 6^n - 5^n)$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$